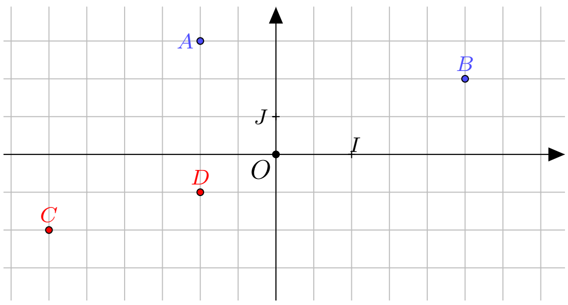
Correction du contrôle n°1

Solution de l'exercice 1. (questions de cours)

1. Un repère $(O; I, J)$ est dit orthonormé lorsque le triangle OIJ est isocèle rectangle en O, c'est-à-dire lorsque $OI = OJ$ et $(OI) \perp (OJ)$.
2. La distance MN est donnée par
$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$
3. Les trois bissectrices sont concourantes en un unique point qui est le centre du cercle inscrit.
4. Puisque les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu, on en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme. De plus ce parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur. $ABCD$ est donc plus précisément un losange.
5. Comment appelle-t-on un quadrilatère $ABCD$ ayant deux côtés consécutifs égaux et dont les diagonales se coupent en leur milieu ?
6. La droite (d) est la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point M.

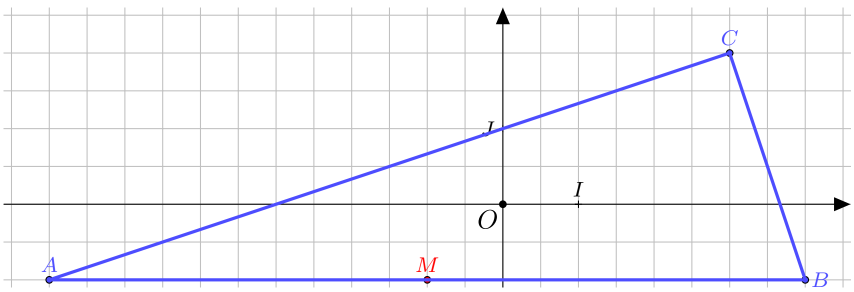
Solution de l'exercice 2.

Les coordonnées de A et B sont : $A(-1; 3)$ et $B(2,5; 2)$.



Solution de l'exercice 3.

1.



2. Puisque M est le milieu de $[AB]$, on a

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-6+4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+(-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Donc les coordonnées du points M sont $M(-1; -1)$.

3. On commence par calculer la distance AM :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-1-(-6))^2 + (-1-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(-1+6)^2 + (-1+1)^2} \\ &= \sqrt{5^2+0} = \sqrt{5^2} = 5. \end{aligned}$$

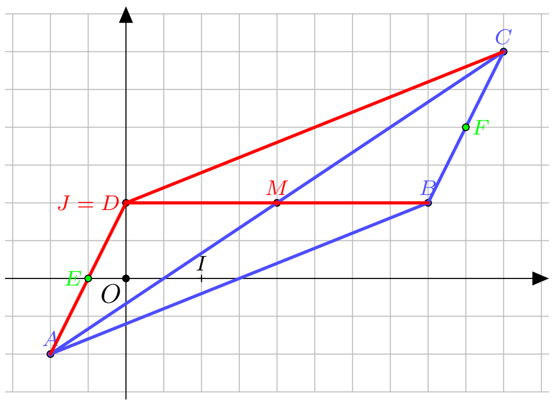
De plus, par définition M est le milieu de AB donc $AM = MB$ et donc $BM = 5$. Enfin il ne nous reste plus qu'à calculer la distance MC :

$$\begin{aligned} MC &= \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} \\ &= \sqrt{(3-(-1))^2 + (2-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(3+1)^2 + (2+1)^2} \\ &= \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

4. On observe que $AM = BM = CM$. Donc le point M est à égale distance de A, B et de C : il est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
5. Puisque M est le centre du triangle circonscrit et qu'il est le milieu du côté de AB, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en C.

Solution de l'exercice 4.

1.



2. Puisque M est le milieu de $[AC]$, on a

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} \\ &= \frac{-1+5}{2} \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} \\ &= \frac{-1+3}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Les coordonnées de M sont donc $M(2; 1)$.

3. Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme il faut et il suffit que ses diagonales se coupent en leur milieu. Cela signifie que M doit être également le milieu de $[BD]$. Donc

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{y_B + y_D}{2}.$$

En remplaçant les valeurs qui nous sont connues, on trouve que :

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{4 + x_D}{2} \\ \Leftrightarrow 4 &= 4 + x_D \\ \Leftrightarrow x_D &= 0. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{1 + y_D}{2} \\ \Leftrightarrow 2 &= 1 + y_D \\ \Leftrightarrow y_D &= 1. \end{aligned}$$

On conclut que les coordonnées de D sont $D(0;1)$ (le point D est égal au point J).

4. Puisque E est le milieu de $[AD]$, on a :

$$\begin{aligned} x_E &= \frac{x_A + x_D}{2} \\ &= \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y_E &= \frac{y_A + y_D}{2} \\ &= \frac{-1+1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Donc les coordonnées de E sont $E\left(-\frac{1}{2};0\right)$. De la même façon, pour F, on a :

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4,5. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y_F &= \frac{y_B + y_C}{2} \\ &= \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Donc les coordonnées de F sont $F(4,5;2)$.

5. **Méthode 1.** Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on sait que le point M (point d'intersection des diagonales) est un centre de symétrie pour le parallélogramme $ABCD$. Notamment l'image de E, le milieu de $[AD]$ par la symétrie centrale de centre M est le milieu de $[BC]$ c'est-à-dire F. Puisque F est l'image de E, nécessairement M est le milieu de $[EF]$ et donc ces trois points sont alignés.
Méthode 2. On montre que le milieu de $[EF]$ est le point M à l'aide des coordonnées. On a

$$\frac{x_E + x_F}{2} = \frac{-0,5 + 4,5}{2} = \frac{4}{2} = 2 = x_M.$$

De même

$$\frac{y_E + y_F}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 = y_M.$$

Ces deux égalités impliquent que M est le milieu de $[EF]$ et donc E, M et F sont alignés.